Bull. Sci. math. 124, 2 (2000) 125–145

STABILISATEURS CYCLIQUES POUR LA REPRESENTATION COADJOINTE DU GROUPE DES DIFFEOMORPHISMES DU CERCLE

PAR

LAURENT GUIEU [1]

Laboratoire de Géométrie, Topologie et Algèbre, Département de Mathématiques, Université de Montpellier 2, F-34095 Montpellier Cedex 5, France

Manuscrit présenté par J.-P. Francoise, reçu en Janvier 1995, révisé en Septembre 1998

RÉSUMÉ. – Nous étudions les orbites coadjointes régulières du groupe $\mathrm{Diff}^+(S^1)$ des difféomorphismes du cercle respectant l'orientation en utilisant le nombre de rotation. Il est démontré que le sous-groupe d'isotropie d'un moment régulier (pour l'action coadjointe) est cyclique fini si et seulement si son ensemble de zéros est non vide et d'intérieur vide. Nous donnons également une condition suffisante de trivialité de ce groupe d'isotropie. © 2000 Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Mots Clés: Groupes de Lie de dimension infinie, Difféomorphismes du cercle, Nombre de rotation, Groupe de Virasoro, Orbites coadjointes

1. Introduction

Motivés en partie par les théories de cordes en Physique Théorique, de nombreux mathématiciens se sont intéressés, ces dernières années, au groupe $\mathrm{Diff}^+(S^1)$ des difféomorphismes du cercle isotopes à l'identité, et à son extension centrale universelle, le *groupe de Virasoro* (cf. [6,11,12]).

Le présent article s'intéresse aux orbites de la représentation coadjointe de $\mathrm{Diff}^+(S^1)$ (c'est-à-dire, celles de Virasoro en charge centrale nulle). Ces objets sont fondamentaux en *Quantification Géométrique* et pour la *Méthodes des Orbites*. Se pose alors le problème de l'extension de ces théories aux groupes de Lie de dimension infinie (cf. [2,7,

[1] E-mail: guieu@darboux.math.univ-montp2.fr.

12]). L'étude des orbites coadjointes de $\mathrm{Diff}^+(\mathrm{S}^1)$ est aussi intéressante pour elle-même car elle fournit des exemples non-triviaux de variétés symplectiques de dimension infinie : on retrouve notamment l'espace homogène[2] $M = \mathrm{Diff}^+(\mathrm{S}^1)/\mathbb{T}$, lequel s'identifie à la classe $\mathcal{S}$ des fonctions univalentes sur le disque unité (convenablement normalisées) (cf. [7]).

Le noyau de cet article est constitué par un autre type d'orbites qui a été beaucoup moins étudié, à savoir celles dont le stabilisateur est cyclique fini (orbites de type C). Le groupe $\mathrm{Diff}^+(\mathrm{S}^1)$ opère par la représentation coadjointe sur le dual topologique $\mathrm{Vect}(\mathrm{S}^1)^*$ de l'espace des champs de vecteurs du cercle. Pour des raisons pratiques, on se restreint au dual régulier : c'est un sous-espace invariant, isomorphe à l'espace $\mathcal{Q}(\mathrm{S}^1)$ des différentielles quadratiques réelles $u(x)\,\mathrm{d}x^2$ sur le cercle. L'action coadjointe se réduit dans ce cas à l'action naturelle des difféomorphismes sur les champs de tenseurs. Les orbites isomorphes à M sont obtenues dans $\mathcal{Q}(\mathrm{S}^1)$ en considérant des fonctions u dépourvues de zéros. Nous examinerons donc le cas des différentielles quadratiques comportant des singularités. G.B. Segal et E. Witten ont remarqué (cf. [12,14]) que le problème de la classification de ces orbites se révèle être plus ardu que celui des orbites de Virasoro. A.A. Kirillov (cf. [6]) a résolu le problème de la classification à l'intérieur d'un sous-espace de $\mathcal{Q}(\mathrm{S}^1)$ générique dans un certain sens. Mais, en adoptant ce point de vue, nous perdons les différentielles quadratiques à singularités plates[3] et les orbites de codimension infinie. Nous ne prétendons pas résoudre ici le prolème de la classification de toutes les orbites régulières. Par contre, nous résolvons entièrement le cas orbites de type C :

THÉORÈME. – *Le stabilisateur de la différentielle quadratique $u(x)(\mathrm{d}x)^2$ est cyclique fini si et seulement si l'ensemble des zéros de la fonction u est non vide et d'intérieur vide.*

A la suite sont redémontrés de manière plus conceptuelle des résultats connus sur les orbites isomorphes à M. Nous donnons aussi quelques précisions concernant les orbites de codimension infinie.

---

[2] Nous identifierons systématiquement, dans la suite, le tore $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ et le sous-groupe de $\mathrm{Diff}^+(\mathrm{S}^1)$ constitué par les rotations autour de l'origine.

[3] Ce sont celles de signe constant et qui possèdent des zéros. Elles interviennent notamment dans l'étude de l'action de $\mathrm{Diff}^+(\mathrm{S}^1)$ sur l'espace des lacets d'une variété riemannienne : voir [15].

L'article est organisé suivant le plan suivant : le Chapitre 2 est consacré à des rappels relatifs au groupe $\mathrm{Diff}^+(\mathrm{S}^1)$ et à sa représentation coadjointe ; cette partie étant classique et less références nombreuses, nous omettons les démonstrations et adoptons un style informel. Le Chapitre 3 contient des résultats connus sur les orbites isomorphes à M ainsi que nos propres résultats sur les orbites de type C. Enfin, nous proposons, en guise de conclusion, quelques questions non encore résolues.

Je tiens ici à remercier Paul Donato, Patrick Iglésias, Valentin Ovsienko et Claude Roger qui ont, à maintes reprises, discuté le contenu de ce travail. Je tiens également à remercier Etienne Ghys de son aide et ses conseils pour la partie "dynamique" de ce papier.

2. Rappels

2.1. Généralités sur le groupe des difféomorphismes du cercle

Dans tout cet article et sauf mention du contraire, tous les objets seront de classe C^∞ et "périodique" sera synonyme de "$\mathbb{Z}$-périodique". G désignera le groupe $\mathrm{Diff}^+(\mathrm{S}^1)$ des difféomorphismes du cercle isotopes à l'identité. Equipé de la topologie C^∞, G devient un groupe de Lie de dimension infinie modelé sur l'espace de Fréchet $\mathfrak{g} = \mathrm{Vect}(\mathrm{S}^1)$ des champs de vecteurs sur le cercle. L'algèbre de Lie de G s'identifie à l'espace vectoriel $\mathfrak{g}$, celui-ci étant muni de l'opposé du crochet de Lie des champs de vecteurs. Après le choix d'une trivialisation du fibré tangent, tout champ $\xi \in \mathfrak{g}$ s'écrit : $\xi = a(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$, où a est une fonction périodique différentiable. On notera : $p:\mathbb{R} \to \mathrm{S}^1 : x \mapsto \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi x}$ le revêtement universel du cercle et $p_*:\widetilde{G} \to G$ le revêtement universel du groupe G. Le groupe $\widetilde{G}$ s'identifie au groupe des difféomorphismes $\mathbb{Z}$-équivariants de la droite : un difféomorphisme $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dans $\widetilde{G}$ si $f(x+1) = f(x) + 1$ pour tout réel x. Dans cette identification, la projection de revêtement p_* vérifie la relation : $p_*(f) \circ p = p \circ f$ pour tout difféomorphisme f dans $\widetilde{G}$.

On définit une application C^0-continue $\tau : \widetilde{G} \to \mathbb{R}$ en posant :

$$\tau(\tilde{g}) = \lim_{k\to\infty} \frac{\tilde{g}^k(x_0)}{k}.$$

Cette limite existe toujours et est indépendante du choix de x_0. Le réel $\tau(\tilde{g})$ est appelé nombre de translation pour le difféomorphisme $\tilde{g}$. τ descend sur les bases des revêtements p et p_* en une application continue $\rho : G \to \mathbb{T}$. Elle est appelée *nombre de rotation* et possède les propriétés suivantes :

(i) $\forall z \in \mathbb{T},\ \rho(R_z) = z$ (où $R_z(z') = zz'$).

(ii) Soit f et $g \in G,\ \rho(f \circ g) = \rho(f)\rho(g)$ dès que f et g commutent.

(iii) Si il existe $h : \mathrm{S}^1 \to \mathrm{S}^1$ continue et de degré 1 telle que $h \circ f = g \circ h$, alors $\rho(f) = \rho(g)$. h est dite application de semi-conjugaison. En particulier, ρ est un invariant de conjugaison.

(iv) Si m est une mesure de probabilité sur le cercle, invariante par un difféomorphisme $g \in G$, alors, pour tout relevé $\tilde{g}$ de g dans $\widetilde{G}$, on a : $\tau(\tilde{g}) = \langle m \mid \tilde{g} - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}} \rangle$.

Nous renvoyons le lecteur aux références : [8,5] et [4] pour de plus amples détails.

2.2. Représentation coadjointe de $\mathrm{Diff}^+(\mathrm{S}^1)$ (cf. [6,11])

2.2.1. Représentation adjointe

Les dérivées en l'identité des automorphismes intérieurs de G s'organisent en une représentation linéaire de G dans son algèbre de Lie, la représentation adjointe :

$$\mathrm{Ad} : G \to GL(\mathfrak{g}) \quad \mathrm{Ad}(g)(\xi) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[g \circ \exp(t\xi) \circ g^{-1}\right]_{t=0}.$$

La représentation adjointe est donc l'action naturelle des difféomorphismes sur les champs de vecteurs :

$$\mathrm{Ad}(g^{-1})(\xi) = \frac{a(\tilde{g}(x))}{\tilde{g}'(x)}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$$

où $\tilde{g}$ désigne un relevé de g dans $\widetilde{G}$ et $\xi = a(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$.

En dérivant en l'identité la représentation adjointe, on obtient une représentation d'algèbre de Lie, la représentation adjointe infinitésimale $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to L(\mathfrak{g})$, qui est au signe près le crochet de Lie des champs de vecteurs :

$$\mathrm{ad}\left(a(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)\left(b(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right) = (a'b - ab')(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}.$$

2.2.2. Dualité

Notons $\mathfrak{g}^*$ le dual topologique de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs différentiables sur S^1. Cet espace s'identifie au produit tensoriel [4] $\Omega^1(\mathrm{S}^1) \otimes \mathcal{D}'(\mathrm{S}^1)$ de l'espace des 1-formes par celui des distributions. La dualité est définie sur les générateurs par :

$$\forall \alpha \in \Omega^1(\mathrm{S}^1),\ \forall T \in \mathcal{D}'(\mathrm{S}^1), \quad \langle \alpha \otimes T \mid \xi \rangle = \big\langle T \mid \alpha(\xi) \big\rangle.$$

On appellera *moment* tout élément μ de $\mathfrak{g}^*$. Nous travaillerons dans un sous-espace faiblement partout dense de $\mathfrak{g}^*$: le sous-espace $\mathfrak{g}^*_R := \Omega^1(\mathrm{S}^1) \otimes \Omega^1(\mathrm{S}^1)$ des moments *réguliers*, le second facteur étant vu comme un sous-espace de $\mathcal{D}'(\mathrm{S}^1)$ (intégration d'une fonction contre une forme). L'espace $\mathfrak{g}^*_R$ s'identifie naturellement à l'espace de sections $\Gamma(\bigotimes^2 T^*\mathrm{S}^1)$, c'est-à-dire à l'espace $\mathcal{Q}(\mathrm{S}^1)$ des différentielles quadratiques réelles (pseudométriques) sur le cercle. Un élément de cet espace sera noté : $\mu = u(x)(\mathrm{d}x)^2$ où u est une fonction périodique différentiable. La dualité s'écrit :

$$\langle \mu \mid \xi \rangle = \int_{\mathrm{S}^1} u(x)a(x)\,\mathrm{d}x.$$

2.2.3. Représentation coadjointe

La représentation coadjointe : $\mathrm{Ad}^* : G \to GL(\mathfrak{g}^*)$ est la contragrédiente de la représentation adjointe. Le sous-espace $\mathfrak{g}^*_R$ est G-invariant et, dans ce sous-espace, la représentation coadjointe s'écrit :

$$\mathrm{Ad}^*(g^{-1})\big(u(x)(\mathrm{d}x)^2\big) = u\big(\tilde{g}(x)\big) \cdot \tilde{g}'(x)^2(\mathrm{d}x)^2.$$

Nous retrouvons l'action naturelle des difféomorphismes sur les pseudométriques. La représentation coadjointe infinitésimale $\mathrm{ad}^* : \mathfrak{g} \to L(\mathfrak{g}^*)$ est donnée par :

$$\mathrm{ad}^*(\xi)(\mu) = -L\xi\,\mu = -(u'a + 2ua')(x)(\mathrm{d}x)^2.$$

On notera B_μ la forme bilinéaire antisymétrique définie sur $\mathfrak{g}$ par :

$$B_\mu(\xi, \zeta) = \big\langle \mu \mid [\xi, \zeta] \big\rangle = \int_{\mathrm{S}^1} u(x)(ab' - a'b)(x)\,\mathrm{d}x.$$

[4] À coefficients dans $C^\infty(\mathrm{S}^1)$.

2.3. Structure faiblement symplectique des orbites coadjointes (cf. [13])

Considérons Ad^* comme une action de G sur $\mathfrak{g}^*$. A tout moment $\mu \in \mathfrak{g}^*$ est associé son application orbitale : $\hat{\mu} : G \to \mathfrak{g}^*$ $g \mapsto \mathrm{Ad}^*(g)(\mu)$. On définit ensuite *l'orbite coadjointe* issue de μ, $O_\mu := \hat{\mu}(G)$, et le *stabilisateur* de μ, $S_\mu := \hat{\mu}^{-1}(\mu)$. La décomposition canonique de l'application orbitale donne le diagramme cohérent suivant :

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\hat{\mu}"] \arrow[d, "can"'] & \mathfrak{g}^* \\ G/S_\mu \arrow[r, "\tilde{\mu}"] & O_\mu \arrow[u, "in"'] \end{tikzcd}$$

FIG. 1.

L'application $\tilde{\mu}$ est une immersion bijective. L'algèbre de Lie du stabilisateur, notée $\mathfrak{s}_\mu$, est égale à $\ker(B_\mu)$ (cf. 2.2.3). La dérivée en $e = can(\mathrm{Id}_{S^1})$ de l'immersion $\tilde{\mu}$ produit un isomorphisme :

$$T_e\tilde{\mu} : \mathfrak{g}/\mathfrak{s}_\mu \to T_\mu O_\mu .$$

La forme bilinéaire B_μ passe au quotient en une 2-forme régulière : $\widetilde{B_\mu} : \mathfrak{g}/\mathfrak{s}_\mu \times \mathfrak{g}/\mathfrak{s}_\mu \to \mathbb{R}$. Par translation sur l'espace homogène, $\widetilde{B_\mu}$ engendre une 2-forme différentielle fermée et régulière sur G/S_μ. Ce tenseur sera noté ω_μ. Le couple $(G/S_\mu, \omega_\mu)$ est une variété faiblement symplectique. On obtient une structure faiblement symplectique σ sur l'orbite coadjointe issue de μ, la 2-*forme de Kirillov–Kostant–Souriau*, en posant : $\omega_\mu = \tilde{\mu}^*\sigma$. C'est-à-dire :

$$\sigma(\delta_\xi \nu, \delta_\zeta \nu) = \langle \nu \mid [\xi, \zeta] \rangle$$

où $\nu = v(x)(\mathrm{d}x)^2$ désigne un point de l'orbite O_μ et où le vecteur tangent $\delta_\xi \nu$ est la valeur en ν du champ fondamental associé à ξ :

$$\delta_\xi \nu = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\mathrm{Ad}^*\big(\exp(t\xi)\big)(\nu)\right]_{t=0} = \mathrm{ad}^*(\xi)(\nu) = -(v'a + 2va')(x)(\mathrm{d}x)^2.$$

Nous avons donc, pour les moments réguliers, la formule explicite suivante :

$$\sigma(\delta_\xi \nu, \delta_\zeta \nu) = \int_{\mathrm{S}^1} \nu(x)(ab' - a'b)(x)\,\mathrm{d}x.$$

3. Stabilisateurs coadjoints des moments réguliers

La classification des orbites coadjointes dans tout le dual topologique $\mathfrak{g}^*$ est une entreprise vaste et pouvant comporter des cas pathologiques. Dans [6], A.A. Kirillov étudie les orbites générique (dans un certain sens) de $\mathfrak{g}_R^* \cong \mathcal{Q}(\mathrm{S}^1)$. On se propose ici de compléter de la manière la plus précise possible ce catalogue d'orbites. Le problème revient à déterminer le groupe d'automorphismes de toute pseudométrique différentiable sur le cercle.

Dans tout ce chapitre, $\mu = u(x)(\mathrm{d}x)^2$ désignera un moment régulier non nul dans $\mathcal{Q}(\mathrm{S}^1)$. Pour des raisons de lisibilité, nous utiliserons la notation g^* à la place de $\mathrm{Ad}^*(g^{-1})$. Nous associons au champ quadratique μ plusieurs objets :

- Son ensemble de zéros (sur le cercle) noté Z.
- Son stabilisateur $S \subset G$:

$$\text{(A)} \qquad g \in S \Leftrightarrow \exists \tilde{g} \text{ relevé de } g \text{ dans } \widetilde{G} \text{ tel que } u \circ \tilde{g}.\tilde{g}'^2 = u.$$

- L'algèbre de Lie de S, notée $\mathfrak{s}$:

$$\text{(B)} \qquad \xi = a(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \in \mathfrak{s} \Leftrightarrow u'a + 2ua' = 0 \text{ et } a \text{ est périodique}.$$

L'ensemble Z est un compact distinct de S^1 et éventuellement vide ; S est un sous-groupe de G, fermé pour la C^1-topologie. Nous noterons également $\widetilde{Z}$ les relevés dans $\mathbb{R}$ des zéros de μ (c'est-à-dire les zéros de u) et $\widetilde{S}$ le groupe des difféomorphismes de $\mathbb{R}$ relevant les éléments de S (c'est-à-dire les solutions de l'équation figurant dans le second membre de (A)). On remarquera également que $\widetilde{S}$ est une extension centrale de S par $\mathbb{Z}$. Nous dirons qu'une application définie sur $\mathcal{Q}(\mathrm{S}^1)$ est un *invariant coadjoint* si elle est constante le long des orbites coadjointes.

3.1. Premières propriétés

En premier lieu, remarquons l'existence d'une intégrale première évidente pour l'équation (B) :

LEMME 3.1.1. – *Si* $\xi = a(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ *est dans l'algèbre de Lie* $\mathfrak{s}$*, la fonction* $x \mapsto u(x)a(x)^2$ *est constante.*

PROPOSITION 3.1.2. –
(i) *Si* $Z = \emptyset$*, alors :* $\mathfrak{s} = \mathbb{R}(|u(x)|^{-1/2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x})$.
(ii) *Si* $Z \neq \emptyset$ *et* $\mathring{Z} = \emptyset$*, alors :* $\mathfrak{s} = \{0\}$.
(iii) *Si* $\mathring{Z} \neq \emptyset$*, alors :* $\mathfrak{s} = \{\xi \in \mathrm{Vect}(\mathrm{S}^1) \mid \mathrm{supp}(\xi) \subset Z\}$.

Preuve. – Supposons que le moment μ ne s'annule jamais. Les éléments de $\mathfrak{s}$ correspondent aux solutions périodiques de l'équation différentielle linéaire :

$$a' + \frac{1}{2}\big(\log|u|\big)' a = 0.$$

D'où la solution générale (toujours périodique) : $a = \lambda|u|^{-1/2}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$). Supposons à présent Z non vide et soit $\xi = a(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ un élément de $\mathfrak{s}$. D'après le Lemme 3.1.1, nous avons l'identité : $u(x)a(x)^2 = 0\ \forall x \in \mathbb{R}$. Le champ ξ s'annule donc sur le complémentaire de Z. Si Z est d'intérieur vide, alors $\mathrm{S}^1 - Z$ est partout dense et $\xi = 0$. Supposons que Z soit d'intérieur non vide. Comme $\mathrm{S}^1 - Z$ est contenu dans $\xi^{-1}(0)$, on a bien $\mathrm{supp}(\xi) \subset Z$. Réciproquement, soit $\zeta = b(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ un champ sur S^1 dont le support est contenu dans Z. Les fonctions u et u' (considérées comme éléments de $C^\infty(\mathrm{S}^1)$) s'annulent sur l'ouvert $\mathring{Z}$. De même, b et b' s'annulent sur l'ouvert $\mathrm{S}^1 - Z$ (par hypothèse). Finalement, il vient l'égalité : $u'b + 2ub' = 0$ sur l'ouvert partout dense $\mathrm{S}^1 - \mathrm{Fr}(Z)$. Donc $\zeta \in \mathfrak{s}$. □

Remarque 3.1.3. –
(a) Par le théorème de Lie–Palais (cf. [8] 8.4), le sous-groupe S est de dimension 1 dans le cas (i) et totalement discontinu dans le cas (ii).
(b) Dans le cas (i), le moment μ définit une métrique riemannienne $u(x)\,\mathrm{d}x \otimes \mathrm{d}x$ sur le cercle dont le groupe d'isométries est exactement le stabilisateur S. Il est classique que ce groupe d'isométries

est toujours isomorphe à $\mathbb{T}$. Nous redémontrerons ce résultat d'une manière plus élémentaire au Paragraphe 3.4. On notera $\mathcal{M}(\mathrm{S}^1)$ le cône ouvert et G-invariant des moments sans zéros. Il se scinde en deux sous-cônes ouverts et G-invariants $\mathcal{M}_+(\mathrm{S}^1)$ et $\mathcal{M}_-(\mathrm{S}^1)$ (métriques riemanniennes définies positives et définies négatives ; voir [15]). Les moments situés sur les frontières de ces deux cônes font partie de l'étude menée au Paragraphe 3.5.

(c) On se place dans le cas (iii). Il est aisé de vérifier que $S^+ := \{g \in G \mid \operatorname{supp}(g) \subset Z\}$ est un sous-groupe de S contenant $\exp(\mathfrak{s})$. Le fait que l'intérieur de Z soit non vide et le lemme suivant impliquent que S^+ et, par conséquent, S sont des sous-groupes de dimension infinie de G. Notons que ce type d'orbites est absent du catalogue des orbites régulières de Virasoro (où tous les stabilisateurs sont de dimension finie).

LEMME 3.1.4. – *L'action du stabilisateur sur le cercle laisse invariant l'ensemble des zéros.*

Preuve. – Soit $g \in S$ et $\tilde{g}$ un de ses relevés. On a l'égalité

$$u\big(\tilde{g}(x)\big)\tilde{g}'(x)^2 = u(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Comme $\tilde{g}' > 0$, nous avons $\tilde{g}(\widetilde{Z}) \subset \widetilde{Z}$. L'inclusion réciproque se démontre en appliquant le même énoncé à l'inverse de $\tilde{g}$. Passant au quotient par le revêtement $p : \mathbb{R} \to \mathrm{S}^1$, nous obtenons finalement $g(Z) = Z$. □

Considérons l'action du stabilisateur S sur le cercle S^1. Le lemme précédent nous apprend—sous l'hypothèse que μ s'annule au moins une fois—que Z est une réunion de S-orbites et que le groupe de difféomorphismes S possède un ensemble minimal (= plus petit fermé non vide invariant par le groupe) contenu dans Z (cf. [4]). Par ailleurs, un calcul direct donne :

PROPOSITION 3.1.5. – *La correspondance*

$$I : \mathcal{Q}(\mathrm{S}^1) - \{0\} \to \mathbb{R}_*^+ : \mu \mapsto \alpha = \int_{\mathrm{S}^1} \big|u(x)\big|^{1/2}$$

est un invariant coadjoint.

3.2. Mesure associée à un moment

Définition 3.2.1. – On associe au moment μ une mesure de probabilité m sur le cercle en posant :

$$\forall \phi \in C^{\infty}(\mathrm{S}^1), \quad \langle m \mid \phi\rangle = \frac{1}{\alpha}\int_0^1 |u(x)|^{1/2}\phi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Remarque 3.2.2. –
(a) Le support de la mesure m est égal à $\mathrm{S}^1 - \overset{\circ}{Z}$.
(b) Cette mesure induit une forme volume sur le cercle si et seulement si μ est dans $\mathcal{M}(\mathrm{S}^1)$. Il s'agit évidemment du volume riemannien (normalisé) associé $\omega = \frac{1}{\alpha}|u(x)|^{1/2}\,\mathrm{d}x$.

Notons $\mathrm{Prob}(\mathrm{S}^1)$ l'espace affine des mesures de probabilité sur S^1. Une simple vérification donne :

PROPOSITION 3.2.3. – *La correspondance*

$$\Pi : \mathcal{Q}(\mathrm{S}^1) - \{0\} \to \mathrm{Prob}(\mathrm{S}^1) : \mu \mapsto m$$

est G-équivariante. En particulier, le stabilisateur S est un sous-groupe du groupe G_m des difféomorphismes préservant la mesure m.

Remarque 3.2.4. –
(a) Le groupe $\mathbb{R}^*$ agit librement sur $\mathcal{Q}(\mathrm{S}^1) - 0$ et ses orbites sont contenues dans les fibres non vides de Π.
(b) En se restreignant à l'espace des métriques riemanniennes définies positives, nous obtenons une application : $\mathcal{M}_+(\mathrm{S}^1) \to \mathrm{Vol}(\mathrm{S}^1)$ où $\mathrm{Vol}(\mathrm{S}^1)$ désigne l'espace des formes volumes sur le cercle de volume total égal à 1. D'après le théorème de Moser (cf. [9]), G agit transitivement sur l'espace des volumes. Comme le sous-groupe d'isotropie du volume constant est égal à $\mathbb{T}$, il vient $\mathrm{Vol}(\mathrm{S}^1) \cong G/\mathbb{T}$. Nous étudierons plus en détail cette application dans la Proposition 3.4.5.

3.3. Le nombre de rotation comme invariant de l'orbite

Nous étudions ici les propriétés du nombre de rotation $\rho : G \to \mathbb{T}$ lorsqu'on le restreint au stabilisateur S. On notera : $\theta : S \to \mathbb{T}$ cette restriction et $[z_0, z_1)$, $z_0, z_1 \in \mathrm{S}^1$, l'arc de cercle de z_0 à z_1 parcouru dans le sens direct.

PROPOSITION 3.3.1. – *θ est un morphisme de groupes dont une formule explicite est donnée par* :

$$\theta(g) = m\big([z, g(z))\big) = p\big(\langle m \mid \tilde{g} - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}\rangle\big), \quad \forall g \in S,\ \tilde{g} \text{ un relevé associé.}$$

Preuve. – Nous savons, d'après la Proposition 3.2.3, que la mesure m est invariante par le groupe de difféomorphismes S. Un résultat de J.F. Plante (cf. [10]) nous apprend alors que l'application : $S \ni g \mapsto m([z, g(z)))$ est un morphisme de groupes coïncidant, sur S, avec le nombre de rotation. La seconde égalité de la proposition est une propriété générale du nombre de rotation (voir 2.1(iv) et [5]) : si une mesure de probabilité m sur le cercle est invariante par un difféomorphisme g, alors le nombre de translation $\tau(\tilde{g})$ d'un relevé est égal à : $\langle m \mid \tilde{g} - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}\rangle$. □

Remarquons qu'un énoncé similaire s'applique à la restriction du nombre de translation au groupe $\widetilde{S}$. Nous noterons K le noyau du morphisme θ et P son image. P sera appelé le *groupe des périodes* du moment μ. Une propriété élémentaire du nombre de rotation montre que le sous-groupe K est constitué des difféomorphismes du stabilisateur fixant au moins un point du cercle. Nous obtenons immédiatement le

COROLLAIRE 3.3.2. – *Si le moment μ s'annule au moins une fois, le groupe des périodes est un sous-groupe de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.*

Preuve. – Soit $g \in S$. Supposons $\theta(g)$ irrationnel. Par Denjoy (cf. [5]), g est un difféomorphisme ergodique [5] du cercle. Mais ceci est impossible, puisque Z est un fermé invariant par g, non vide (par hypothèse) et distinct de S^1 (car $\mu \neq 0$). □

Supposons à présent que Z ait un intérieur non vide. D'après la Remarque 3.1.3(c), le stabilisateur S admet un sous-groupe de dimension infinie S^+ dont chaque élément g a son support contenu dans Z. L'ensemble des zéros étant distinct de S^1, g admet au moins un point fixe et $\theta(g) = 1$. Donc le sous-groupe $\theta(S^+)$ de $\mathbb{T}$ est trivial. Les stabilisateurs

[5] C'est-à-dire que les seuls ensembles fermés invariants par ce difféomorphisme sont $\emptyset$ et S^1.

étant tous conjugués le long d'une même orbite coadjointe et le nombre de rotation étant invariant par conjugaison, nous avons également le :

COROLLAIRE 3.3.3. – *La correspondance* $\mu \mapsto P$ *est un invariant coadjoint.*

La mesure invariante m va nous permettre d'exhiber une application de semi-conjugaison du stabilisateur à son groupe de périodes (on identifie P et le groupe de rotations correspondant) :

PROPOSITION 3.3.4. – *Soit* z_0 *un point arbitraire sur le cercle, l'application* $h : \mathrm{S}^1 \to \mathrm{S}^1 : z \mapsto m([z_0, z))$ *est surjective, de classe* C^1, *de classe* C^∞ *sur le complémentaire de* Z, *de degré* 1 *et réalise une semi-conjugaison de* S *à* P. *Plus précisément,* $h \circ g = R_{\theta(g)} \circ h$ *pour tout* $g \in S$.

Preuve. – Soit x_0 un réel tel que $p(x_0) = z_0$ et $\tilde{h} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\tilde{h}(x) = \frac{1}{\alpha} \int_{x_0}^{x} \left|u(t)\right|^{1/2} \mathrm{d}t.$$

Cette application définit un relèvement croissant et de classe C^1 de l'application h à $\mathbb{R}$. Sur l'ouvert $\mathbb{R} - \widetilde{Z}$, $\tilde{h}$ est strictement croissante et de classe C^∞, comme primitive d'une fonction strictement positive. La dérivée de h étant périodique, nous avons $\tilde{h}(x+1) = \tilde{h}(x) + Cte$, pour tout $x \in \mathbb{R}$; cette constante est donc égale à :

$$\frac{1}{\alpha} \int_{0}^{1} \left|u(t)\right|^{1/2} \mathrm{d}t = 1$$

et h est de degré 1. Il s'ensuit, puisque $\tilde{h}(x+n) = \tilde{h}(x) + n$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, que $\tilde{h}$ est surjective. Enfin, soit $g \in S$ et $\tilde{g}$ un de ses relevés, on déduit immédiatement de l'équation du stabilisateur l'égalité : $(\tilde{h} \circ \tilde{g} - \tilde{h})' = 0$ d'où : $\tilde{h} \circ \tilde{g} = T_c \circ \tilde{h}$, c désignant une constante réelle. $\tilde{h}$ définit donc une semi-conjugaison de $\tilde{g}$ à la translation d'amplitude c. Par suite, $\tau(\tilde{g}) = c$ et $\tilde{h} \circ \tilde{g} = T_{\tau(\tilde{g})} \circ \tilde{h}$, d'où le résultat cherché, en passant au quotient. $\square$

COROLLAIRE 3.3.5. – *Lorsque* Z *est vide,* h *est un élément de* $\mathrm{Diff}^+(\mathrm{S}^1)$. *Si* Z *est non vide, d'intérieur vide alors* h *est un homéomorphisme de classe* C^1 *respectant l'orientation et n'est jamais un difféomorphisme.*

Preuve. – Supposons que μ n'admette aucun zéro. D'après la proposition précédente, h est de classe C^∞, à dérivée strictement positive (égale à $\frac{1}{\alpha}|u|^{1/2}$) et de degré 1. Supposons maintenant Z non vide et d'intérieur vide. h ne peut être un difféomorphisme puisque sa dérivée h' possède des zéros. Nous allons montrer, cependant, que h est un homéomorphisme du cercle conservant l'orientation. Toujours d'après 3.3.4, il suffit de montrer que h possède un relèvement $\tilde{h}$ strictement croissant. Soient donc x et y deux réels tels que $x < y$. Z étant sans points intérieurs, la fonction u n'est pas identiquement nulle sur l'intervalle $I =]x, y[$ et l'intégrale

$$\frac{1}{\alpha}\int_x^y \left|u(t)\right|^{1/2} \mathrm{d}t = \tilde{h}(y) - \tilde{h}(x)$$

est donc strictement positive. □

3.4. Cas où $Z = \emptyset$

Les résultats contenus dans ce paragraphe ne sont pas nouveaux et sont dûs pour l'essentiel à A.A. Kirillov (cf. [6]). Toutefois, nous les établissons en utilisant les outils construits dans le paragraphe précédent. Dans toute cette partie, $\mu = u(x)(\mathrm{d}x)^2$ désigne un moment régulier sans zéros ; son signe sera noté ε.

LEMME 3.4.1 (A.A. Kirillov). – *Le moment* $\mathrm{Ad}^*(h)(\mu)$ *est égal au moment constant* : $\nu = \varepsilon\alpha^2\,(\mathrm{d}x)^2$.

Preuve. –

$$h^*\nu = \varepsilon\alpha^2.\tilde{h}'(x)^2(\mathrm{d}x)^2 = \varepsilon\alpha^2\frac{1}{\alpha^2}\left|u(x)\right|(\mathrm{d}x)^2 = \mu. \qquad \square$$

PROPOSITION 3.4.2. – *θ est un isomorphisme et S est C^∞-conjugué à $\mathbb{T}$ par le difféomorphisme h.*

Preuve. – Soit $g \in K$. D'après la relation de semi-conjugaison de la Proposition 3.3.4, on obtient : $h \circ g = h$. h étant un difféomorphisme (puisque μ est sans zéros), $g = \mathrm{Id}_{S^1}$ et θ est injectif. Soit $z \in \mathbb{T}$, posons $g := h^{-1} \circ R_z \circ h$. On vérifie immédiatement que $g \in G$ et $\mathrm{Ad}^*(g)(\mu) = \mu$. g et R_z étant conjugués par h, $\theta(g) = z$. θ est donc aussi surjectif. Enfin, la semi-conjugaison h de S à $P = \mathbb{T}$ est ici une véritable conjugaison puisque h est un difféomorphisme de classe C^∞. □

COROLLAIRE 3.4.3 (A.A. Kirillov). – *La correspondance*

$$J:\mathcal{M}(\mathrm{S}^1) \ni \mu \to \varepsilon\alpha^2 \in \mathbb{R}_*$$

est un invariant coadjoint complet prenant toutes les valeurs réelles non nulles.

Preuve. – Soit donc μ et ν deux moments dans $\mathcal{M}(\mathrm{S}^1)$ ayant même image par J. Notons h_μ et h_ν deux difféomorphismes associés respectivement à μ et ν par la Proposition 3.3.4. Nous obtenons alors par 3.4.1 :

$$\mathrm{Ad}^*(h_\mu)(\mu) = J(\mu)(\mathrm{d}x)^2 = J(\nu)(\mathrm{d}x)^2 = \mathrm{Ad}^*(h_\nu)(\nu),$$

d'où : $\nu = \mathrm{Ad}^*(h_\nu^{-1} \circ h_\mu)(\mu)$ et les deux moments μ et ν sont sur la même orbite. A présent, soit a un réel non nul, on a :

$$J\big(a(\mathrm{d}x)^2\big) = \mathrm{signe}(a)\left[\int_0^1 |a|^{1/2}\,\mathrm{d}x\right]^2 = a$$

et l'application J est surjective. □

COROLLAIRE 3.4.4 (A.A. Kirillov). – *L'espace d'orbites $\mathcal{M}(\mathrm{S}^1)/G$ est en bijection avec $\mathbb{R}_*$.*

Preuve. – C'est une simple transcription du corollaire précédent : il suffit d'effectuer la décomposition canonique de l'application J. □

La proposition suivante précise le résultat précédent et constitute une extension d'une proposition de T. Wurzbacher (cf. [15]).

PROPOSITION 3.4.5. – *La projection $\Pi:\mathcal{M}(\mathrm{S}^1) \to \mathrm{Vol}(\mathrm{S}^1)$ est isomorphe au fibré principal trivial $G/\mathbb{T} \times \mathbb{R}^* \to G/\mathbb{T}$.*

Preuve. – Soit $orb: G \to \mathrm{Vol}(\mathrm{S}^1) : g \mapsto g^*(\Theta)$ l'application orbitale associée à la forme de Maurer–Cartan Θ de S^1 et $can: G \to G/\mathbb{T}$ la projection canonique associée au quotient de G par les classes *à droite* modulo le sous-groupe des rotations. Notons que *orb* est surjective (cf. 3.2.4(b)). Nous disposons alors du diagramme cohérent décrit à la Fig. 2 ci-après où f désigne la décomposition canonique de l'application

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}(\mathrm{S}^1) \arrow[rr, "F"] \arrow[d, "\Pi"'] & & G/\mathbb{T} \times \mathbb{R}_* \arrow[d, "pr_1"] \\
\mathrm{Vol}(\mathrm{S}^1) & & G/\mathbb{T} \arrow[ll, "f"'] \\
& G \arrow[ul, "orb"] \arrow[ur, "can"'] &
\end{tikzcd}$$

FIG. 2.

orbitale et F l'application définie par $F(\mu) = (f^{-1}(\Pi(\mu)), J(\mu))$. Il est clair que f et F sont des difféomorphismes. $\square$

3.5. Théorème principal—Cas où $Z \neq \emptyset$ et $\mathring{Z} = \emptyset$

Les moments de ce type n'ont pas été étudiés dans toute leur généralité dans la littérature. A.A. Kirillov a donné dans [6] un système complet d'invariants dans le cas particulier où tous les zéros sont simples (donc en nombre fini). Dans [14], E. Witten mentionne le fait que, dans le cas d'un nombre fini de zéros, le stabilisateur S est cyclique fini et permute les zéros du moment μ. Nous proposons ici d'alléger cette hypothèse de finitude sur l'ensemble des zéros. Nous étudierons également les conditions que doit vérifier l'ordre de S ; en particulier, nous établirons une condition suffisante de trivialité pour S.

NB. Nous considérons dans tout ce paragraphe un moment $\mu = u(x)(\mathrm{d}x)^2$ dont l'ensemble des zéros est *non vide et d'intérieur vide*.

LEMME 3.5.1. – *Le stabilisateur S agit librement sur* S^1 *et est de torsion.*

Preuve. – S est de torsion, puisque isomorphe à un sous-groupe de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ (cf. 3.3.2). Soit, maintenant, g un difféomorphisme du stabilisateur fixant un point du cercle. Alors $\theta(g) = 1$ et la relation de semi-conjugaison donne $h \circ g = h$, soit : $g = \mathrm{Id}_{\mathrm{S}^1}$, puisque h est inversible (cf. 3.3.5). $\square$

Remarque 3.5.2. – Une conséquence immédiate de ce résultat est que chaque orbite pour l'action de S sur S^1 est en bijection avec S.

COROLLAIRE 3.5.3. – *θ est un monomorphisme et S est C^0-conjugué à P par l'homéomorphisme h.*

Preuve. – En effet, K est trivial si et seulement si l'action de S sur le cercle est libre. Par 3.3.4 et 3.3.5, on a : $g = h^{-1} \circ R_{\theta(g)} \circ h$. □

LEMME 3.5.4. – *Chaque S-orbite est homéomorphisme à P.*

Preuve. – Soit $\Omega = \{g(z_0) \mid g \in S\}$ la S-orbite issue du point z_0 et soit h l'homéomorphisme associé à ce point. La relation de conjugaison 3.3.4 donne : $h(g(z_0)) = R_{\theta(g)}(h(z_0)) = \theta(g)\ \forall g \in S$. D'où $h(\Omega) = P$. □

THÉORÈME 3.5.5. – *Le stabilisateur du moment régulier μ est un sous-groupe cyclique fini de G si et seulement si l'ensemble des zéros de μ est non vide et d'intérieur vide.*

Preuve. – Supposons Z non vide et d'intérieur vide. P, sous-groupe de $\mathbb{T}$, est soit fermé, soit partout dense. Supposons qu'il soit fermé. Il est alors cyclique fini ou égal à $\mathbb{T}$. Mais cette dernière éventualité est exclue puisque P est, dans notre cas, un sous-groupe de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Supposons alors P partout dense. Soit $z_0 \in Z$ et Ω la S-orbite associée. Celle-ci est contenue dans Z, puisque l'ensemble des zéros est S-invariant. Par le lemme précédent, Ω est partout dense, donc Z l'est également. Mais ceci est absurde car Z est un fermé distinct de S^1. Si Z est vide ou d'intérieur non vide, S est conjugué à $\mathbb{T}$ ou est de dimension infinie et ne peut donc pas être cyclique fini. □

Remarquons qu'il n'est pas possible de conclure que P est cyclique fini et utilisant la fermeture de S : la conjugaison par h est un C^0-automorphisme du groupe G envoyant S sur P, mais S est fermé pour la C^1-topologie seulement. Nous appellerons orbites de type C les orbites coadjointes à stabilisateur cyclique (ce dernier qualificatif a un sens puisque les stabilisateurs sont tous conjugués le long d'une même orbite et que la "cyclicité" se conserve par conjugaison). Nous allons à présent donner quelques indications relativement à l'ordre, noté n_S, du sous-groupe S. Pour mener à bien cette étude, nous avons besoin d'une :

Définition 3.5.6. – Soit z et w deux zéros pour le moment $\mu = u(x)(\mathrm{d}x)^2$. On dira que z et w sont du *même type* $(k, \varepsilon) \in \mathbb{N}_* \times \{-1; 1\}$

si ils sont de même ordre k et si :

$$\text{signe}\big(u^{(k)}(z)\big) = \text{signe}\big(u^{(k)}(w)\big) = \varepsilon.$$

On définit ainsi une relation d'équivalence sur l'ensemble Z. Chaque classe (i.e. chaque type) est repérée par un couple $(k, \varepsilon) \in \mathbb{N}_* \times \{-; +\}$; on la notera $Z_{k,\varepsilon}$. Si cette classe a un cardinal fini et non nul, nous noterons ce dernier $n_{k,\varepsilon}$. Le lemme suivant montre que chaque classe est une réunion de S-orbites.

LEMME 3.5.7. – *L'action de S laisse invariante chaque classe $Z_{k,\varepsilon}$.*

Preuve. – En dérivant successivement i fois ($i \geqslant 1$) la formule (A) définissant le stabilisateur, nous obtenons pour tout relevé $\tilde{g}$ d'un élément g de S :

$$(\diamond) \qquad u^{(i)} \circ \tilde{g}.(\tilde{g}')^{i+2} = u^{(i)} + \sum_{j=0}^{i-1} u^{(j)} \circ \tilde{g}.F_i.$$

Les F_i désignant des fonctions dont les valeurs $F_i(x)$ ne dépendent que des valeurs en x des dérivées de $\tilde{g}$. On démontre facilement, par récurrence sur l'entier k, que si x est un zéro de u d'ordre $\geqslant k$ (i.e. : $u(x) = u'(x) = \cdots = u^{(k-1)}(x) = 0$), il en est de même pour $\tilde{g}(x)$. Si, de plus, x est exactement d'ordre k, la formule $(\diamond)$ donne alors :

$$u^{(k)}\big(\tilde{g}(x)\big).(\tilde{g}')^{k+2}(x) = u^{(k)}(x).$$

La dérivée $\tilde{g}'$ ne s'annulant jamais, $\tilde{g}(x)$ est aussi d'ordre k. $\tilde{g}'$ étant positive, le type de x est également conservé par $\tilde{g}$. D'où, $g(Z_{k,\varepsilon}) \subset Z_{k,\varepsilon}$. L'inclusion réciproque s'obtient classiquement en remarquant que le même résultat est valable pour l'inverse de g. □

Comme l'ensemble des zéros est invariant par S, il est clair, si Z est fini, que n_S divise n_Z. Un raffinement de ce fait est donné par :

PROPOSITION 3.5.8. – *Soit (k, ε) un type tel que la classe correspondante $Z_{k,\varepsilon}$ soit finie et non vide, alors n_S divise $n_{k,\varepsilon}$.*

Preuve. – Le lemme précédent nous apprend que $Z_{k,\varepsilon}$ est une réunion de S-orbites. De plus, d'après la Remarque 3.5.2, nous avons : $n_S = \text{Card}(\Omega)$ pour toute S-orbite Ω dans $Z_{k,\varepsilon}$. La conclusion est alors évidente, $Z_{k,\varepsilon}$ étant fini. □

Nous obtenons ainsi une condition suffisante de trivialité du stabilisateur S :

COROLLAIRE 3.5.9. – *Si il existe une famille d'effectifs* $n_{k,\varepsilon}$ *premiers entre eux, alors le stabilisateur* S *est réduit à l'identité.*

Ce résultat permet le traitement rapide d'exemples :

3.5.1. Exemples d'orbites de type C

(a) $\mu = \cos(2\pi nx)(\mathrm{d}x)^2$ (n étant un entier $\geqslant 1$).
Ce moment possède $2n$ zéros sur le cercle et S est le sous-groupe cyclique fini de G engendré par la rotation $x \mapsto x + \frac{1}{n}$.

(b) $\mu = \cos^2(2\pi nx)(\mathrm{d}x)^2$ (n étant un entier $\geqslant 1$).
De même que pour le cas précédent, nous avons : $n_Z = 2n$. Le sous-groupe S est d'ordre $2n$, engendré par la rotation $x \mapsto x + \frac{1}{2n}$.

(c) En faisant $n = 1$ dans le cas (a) décrit ci-dessus, le stabilisateur S devient trivial et l'orbite O_μ issue de μ s'identifie au groupe G lui-même. En fait, en utilisant le Corollaire 3.5.9, on peut construire de nombreux exemples où S est réduit à l'identité (voir aussi [14]). Ce cas ne se présente jamais pour les stabilisateurs de Virasoro, à moins de sortir du dual régulier (cf. [3]). La forme de Kirillov–Kostant–Souriau sur O_μ induit une structure de groupe (faiblement) symplectique sur G : nous montrerons au paragraphe suivant (Prop. 3.6.2) que cette situation se généralise à toutes les orbites de type C. Enfin, notons que cette famille de structures symplectiques sur le groupe est reliée à l'existence de structures de bigèbres de Lie sur l'algèbre des champs de vecteurs du cercle (voir l'appendice de [14] et l'article [1]).

3.6. Structures symplectiques

Nous donnons ici deux résultats concernant les structures faiblement symplectiques des orbites coadjointes régulières isomorphes à $G/\mathbb{T}$ ($Z = \emptyset$) et de type C ($Z \neq \emptyset$ et $\overset{\circ}{Z} \neq \emptyset$).

PROPOSITION 3.6.1 (A.A. Kirillov). – *Les moments constants et non nuls* $a(\mathrm{d}x)^2$ *définissent sur l'espace homogène* $G/\mathbb{T}$ *une famille* $\{\omega_a\}_{a\in\mathbb{R}_*}$ *à un paramètre de structures faiblement symplectiques.*

Preuve. – Soit $a(\mathrm{d}x)^2$ un moment régulier constant et non-nul, S_a son stabilisateur et O_a son orbite coadjointe. Il est facile de voir que son stabilisateur est toujours égal au sous-groupe $\mathbb{T}$ des rotations. La décomposition canonique de l'application orbitale (cf. 2.3) $\hat{a}:G \to \mathcal{Q}(\mathrm{S}^1)$ induit une immersion bijective $\tilde{a}:G/T \to O_a$. Il suffit ensuite de tirer en arrière la forme K.K.S. par cette application : $\omega_a := \tilde{a}^*(s)$. $\square$

Profitons de l'occasion pour rappeler que chaque orbite isomorphe à $G/\mathbb{T}$ possède toujours exactement un moment constant dont la valeur est fournie par l'invariant J (voir 3.4.3).

PROPOSITION 3.6.2. – *La forme de Kirillov–Kostant–Souriau sur chaque orbite de type C induit une forme faiblement symplectique invariante à gauche sur le groupe G.*

Preuve. – Soit μ un moment régulier dont l'ensemble des zéros est non vide et d'intérieur vide, S son stabilisateur et O son orbite coadjointe. Le groupe S étant cyclique fini, choisissons un générateur g. Ce dernier est un difféomorphisme périodique : $\exists q \in \mathbb{N}_*,\ g^q = \mathrm{Id}_{\mathrm{S}^1}$. On sait alors (cf. [5]), que g est C^∞-conjugué à une rotation rationnelle $R_{p/q}: x \mapsto x + \frac{p}{q}$ $(p \in \mathbb{Z})$. Soit $f \in G$ une telle conjugaison : $f \circ g \circ f^{-1} = R_{p/q}$. Posant $\nu = \mathrm{Ad}^*(f)(\mu) \in O$, il est facile de vérifier que le stabilisateur de ν est le groupe cyclique fini d'ordre q engendré par $R_{p/q}$: il s'agit ici du groupe P des périodes pour le moment μ. Soit $\hat{\nu}: G \to O$ la restriction à droite surjective de l'application orbitale associée à ν. On a—en reprenant les notations utilisées en 2.3—le diagramme cohérent suivant (Fig. 3).

$$\begin{tikzcd} G \arrow[d, "can"'] \arrow[dr, "\hat{\nu}"] & \\ G/P \arrow[r, "\tilde{\nu}"] & O \end{tikzcd}$$

FIG. 3.

can étant un revêtement et $\tilde{\nu}$ une immersion bijective, l'image réciproque $\omega = \hat{\nu} * (\sigma)$ de la forme K.K.S. est encore une forme régulière et fermée sur G. L'invariance à gauche de ω se déduit facilement de l'égalité $(\mathrm{Ad}^*(g))^*\sigma = \sigma,\ \forall g \in G$. $\square$

Notons que—en restreignant notre étude aux orbites coadjointes régulières génériques au sens de A.A. Kirillov—on obtiendrait une proposition similaire à 3.6.1 : le système complet (dans le cas générique) d'invariants coadjoints découvert par A.A. Kirillov permet de paramétrer une famille de formes (faiblement) symplectiques et invariantes à gauche sur le groupe G, de la même façon que l'invariant J paramètre les structures symplectiques sur l'espace homogène $G/\mathbb{T}$ (voir [6,14]).

4. Conclusions et questions

Le cas des orbites isomorphes à $G/\mathbb{T}$ est bien connu et a été amplement étudié. La structure des stabilisateurs pour les orbites de codimension infinie, par contre, n'a pas encore été bien détaillée : il nous semble par exemple intéressant de savoir si leur groupe de périodes est toujours trivial. Nous espérons qu'une étude plus approfondie de la correspondance *moment* $\mapsto$ *mesure de probabilité* pourra mener à des résultats plus précis. En ce qui concerne le cas des orbites de type C, certaines questions sont encore non résolues parmi lesquelles : établir une formule explicite donnant l'ordre du stabilisateur en fonction du moment ; retrouver les invariants de A.A. Kirillov à partir de notre construction ; déterminer un système complet d'invariants coadjoints pour le cas non générique et en déduire un modèle de l'espace des orbites de type C.

RÉFÉRENCES

[1] E. BEGGS et S. MAJID, Matched pairs of topological Lie algebras corresponding to Lie bialgebras structures on $\mathrm{Diff}(S^1)$, *Annales de l'Institut Henri Poincaré* (*Physique théorique*) 53 (1) (1990) 15–34.

[2] M. BOWICK et S. RAJEEV, The holomorphic geometry of closed bosonic string theory, *Nuclear Physics B* 293 (1988) 348–384.

[3] P. DONATO, $\mathrm{Diff}(S^1)$ as coadjoint orbit in the Virasoro space of moments, *J. Geom. Phys.* 13 (3) (1994) 299–305.

[4] C. GODBILLON, *Systèmes Dynamiques sur les Surfaces*, Publications de l'Institut de Recherche Mathématique Avancée, Université Louis Pasteur, Strasbourg, 1979.

[5] M.R. HERMAN, Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations, *Publications Mathématiques de l'I.H.E.S.* 49 (1979) 5–234.

[6] A.A. KIRILLOV, Infinite dimensional Lie groups: Their orbits, invariants and representations, in: *The Geometry of Moments*, Lecture Notes in Math., Vol. 970, Springer, Berlin, 1982, pp. 101–123.

[7] A.A. KIRILLOV et D.V. YURIEV, Representations of the Virasoro algebra by the orbit method, *J. Geom. Phys.* 5 (3) (1988) 351–363.

[8] J. MILNOR, Remarks on infinite dimensional Lie groups, in: B.S. DeWitt et R. Stora (Eds.), *Ecole d'été des Houches* : *Relativité, Groupes et Topologie II*, Session XL, Elsevier Science Publishers, 1984, pp. 1007–1057.

[9] J. MOSER, On the volume elements on a manifold, *Trans. Amer. Math. Soc.* 120 (1965) 286–294.

[10] J.F. PLANTE, Measure preserving pseudogroups and a theorem of Sacksteder, *Annales de l'Institut Fourier* 25 (1) (1975) 237–249.

[11] C. ROGER, Représentation coadjointe des groupes et algèbres de Lie de dimension infinie (d'après A.A. Kirillov), Prépublication de l'Université de Metz.

[12] G.B. SEGAL, Unitary representations of some infinite dimensional groups, *Comm. Math. Phys.* 80 (3) (1981) 301–342.

[13] J.M. SOURIAU, *Structure des Systèmes Dynamiques,* Editions Dunod, Paris, 1970.

[14] E. WITTEN, Coadjoint orbits of the Virasoro group, *Comm. Math. Phys.* 114 (1) (1988) 1–53.

[15] T. WURZBACHER, Symplectic geometry of the loop space of a Riemannian manifold, *J. Geom. Phys.* 16 (4) (1995) 345–384.